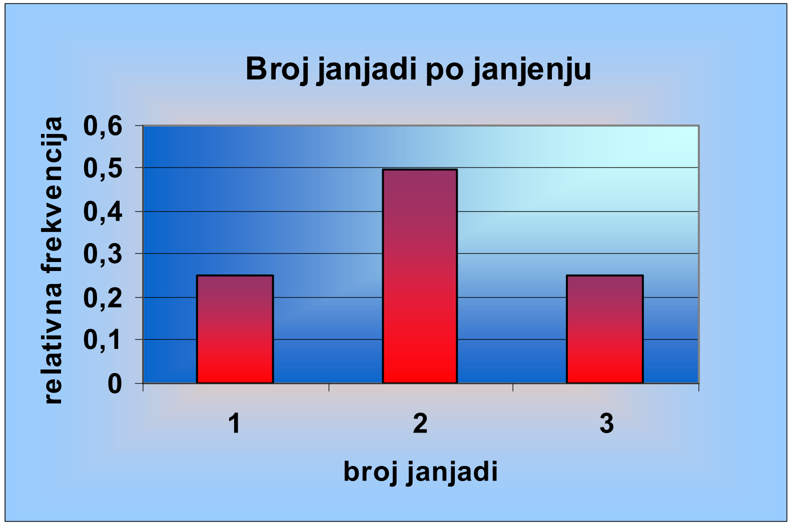
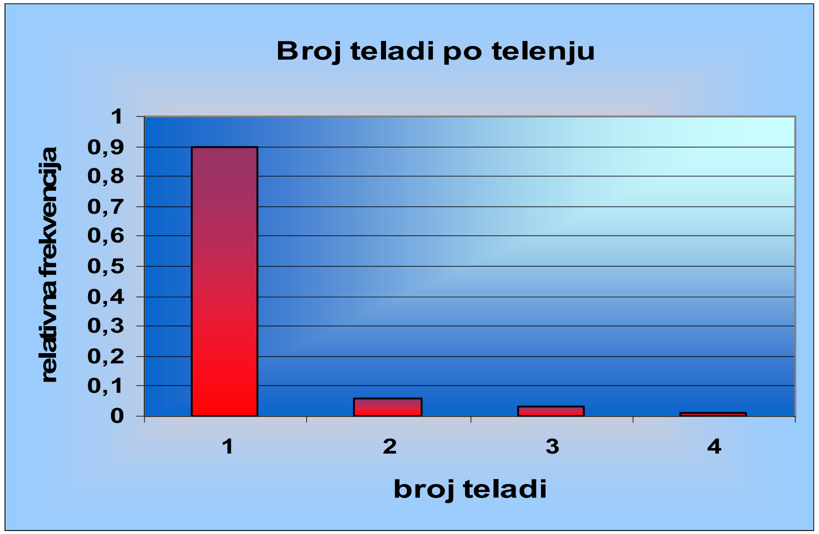
STATISTIKA

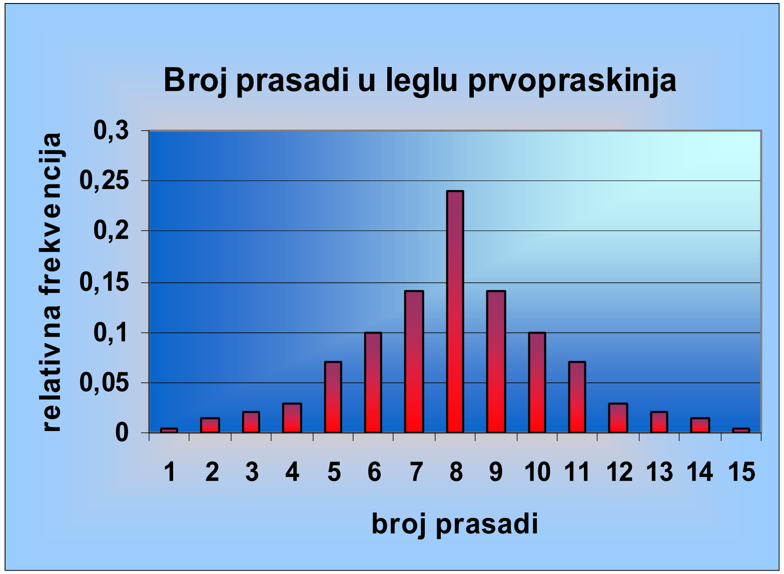
NORMALNA DISTRIBUCIJA I NJEZINA PRIMJENA PRI PROCJENI PARAMETARA POPULACIJE NA OSNOVI PARAMETARA UZORKA

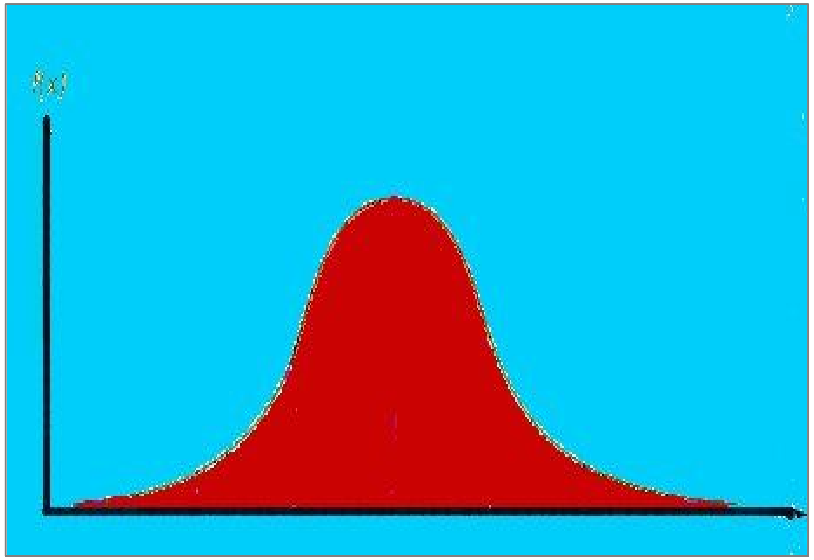
Prof. dr. sc. Velimir Sušić

GRAFIČKI PRIKAZ DISKONTINUIRANIH I KONTINUIRANIH DISTRIBUCIJA VJEROJATNOSTI



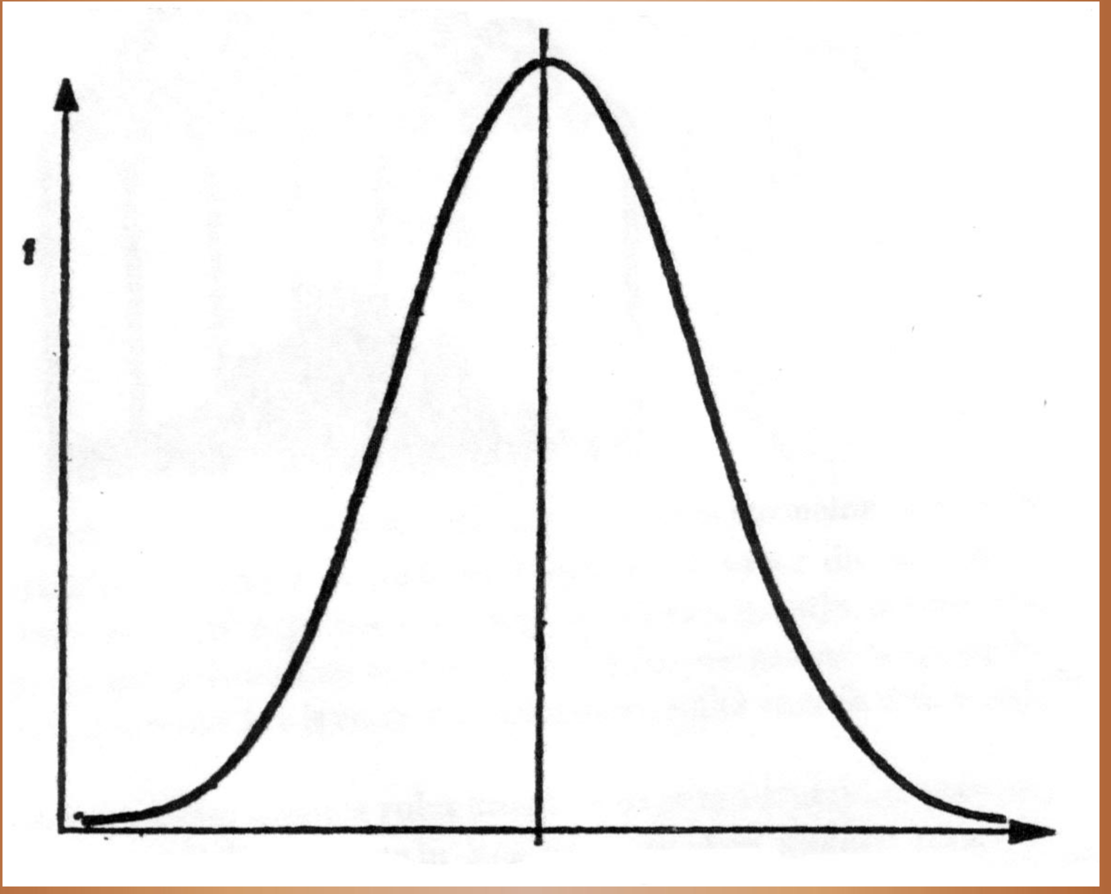






Distribucija vrijednosti varijable

- normalna distribucija

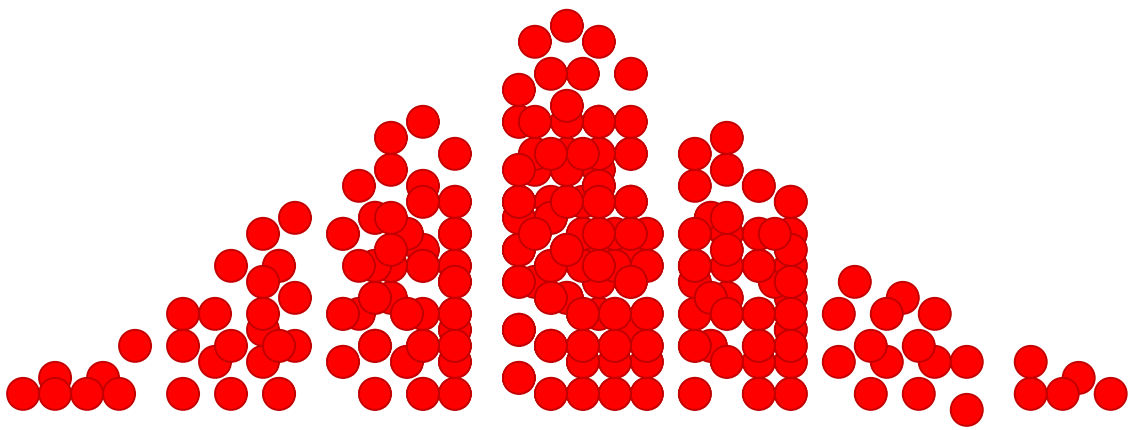


NORMALNA DISTRIBUCIJA – značenje i oblik

- osnova za razumijevanje pojmova statističke vjerojatnosti
- Gauss-ova (njemački matematičar, 1777.-1858.)
- zvonasta krivulja

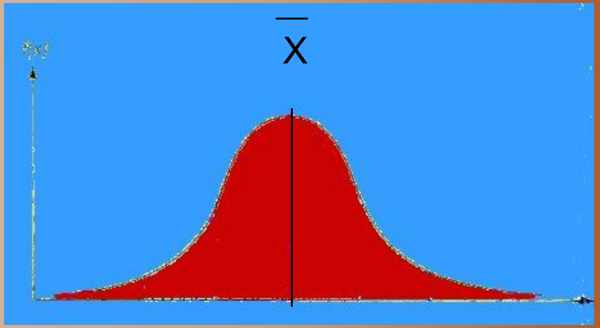
NORMALNA DISTRIBUCIJA – uvjeti nastanka

- najveći broj svojstava u prirodi očituje normalnu distribuciju ukoliko su ispunjeni uvjeti:
  - veliki broj rezultata (mjerenja)
  - da su sva mjerenja provedena jednakom metodom i u što sličnijim uvjetima
  - skupina u kojoj mjerimo mora biti homogena po svim svojstvima, a heterogena po svojstvu koje mjerimo



NORMALNA DISTRIBUCIJA – oblik i karakteristike

- određena je s dva pokazatelja: srednja vrijednost ($\bar{x}$) i standardna devijacija (s)



- unimodalna je

- simetrična je s obzirom na srednju vrijednost ($\bar{x}$). Krivulja s desne strane od $\bar{x}$ je zrcalna slika krivulje s lijeve strane od $\bar{x}$ (“zvonasti oblik”)

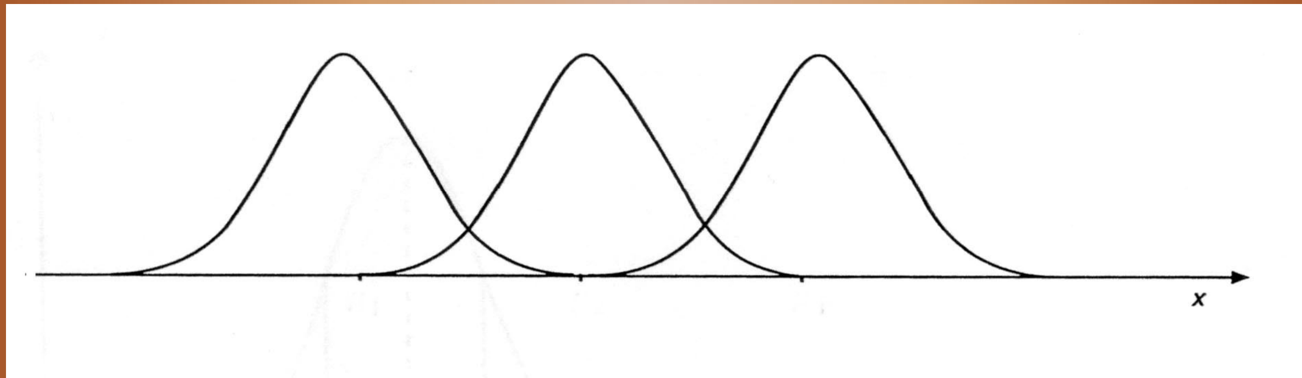
- vrijednosti aritmetičke sredine, medijana i moda su iste

NORMALNA DISTRIBUCIJA – promjena oblika ovisno o veličini standardne devijacije aritmetičke sredine

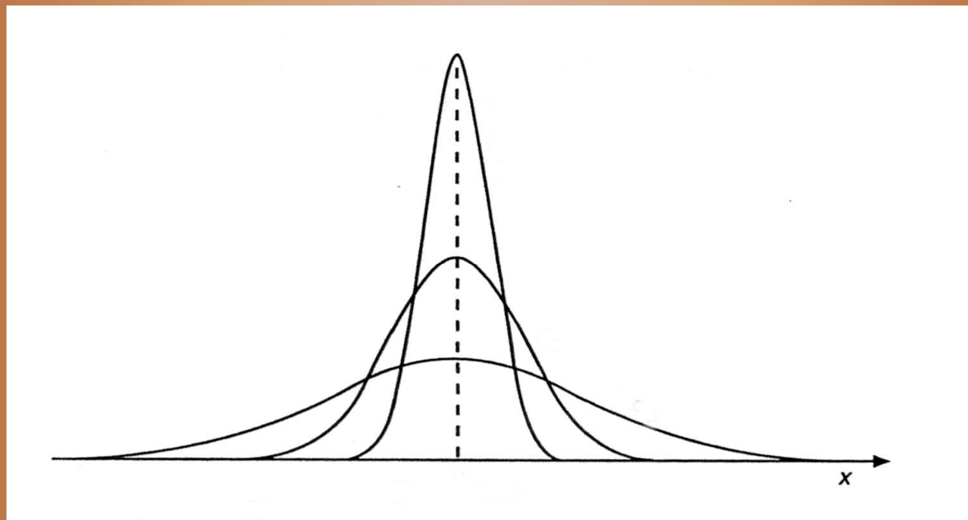
- ukoliko standardna devijacija (s) ostaje nepromjenjena, povećavanjem srednje vrijednosti ($\bar{x}$) dolazi do horizontalnog pomicanja krivulje udesno. Smanjivanje srednje vrijednosti ($\bar{x}$) “pomiče” krivulju horizontalno ulijevo.

- smanjenje standardne devijacije (s) dovodi do uske i visoke krivulje, a povišenje standardne devijacije (s) do široke i niske krivulje.

NORMALNA DISTRIBUCIJA – promjena oblika ovisno o veličini standardne devijacije aritmetičke sredine



različita srednja vrijednost, jednaka standardna devijacija

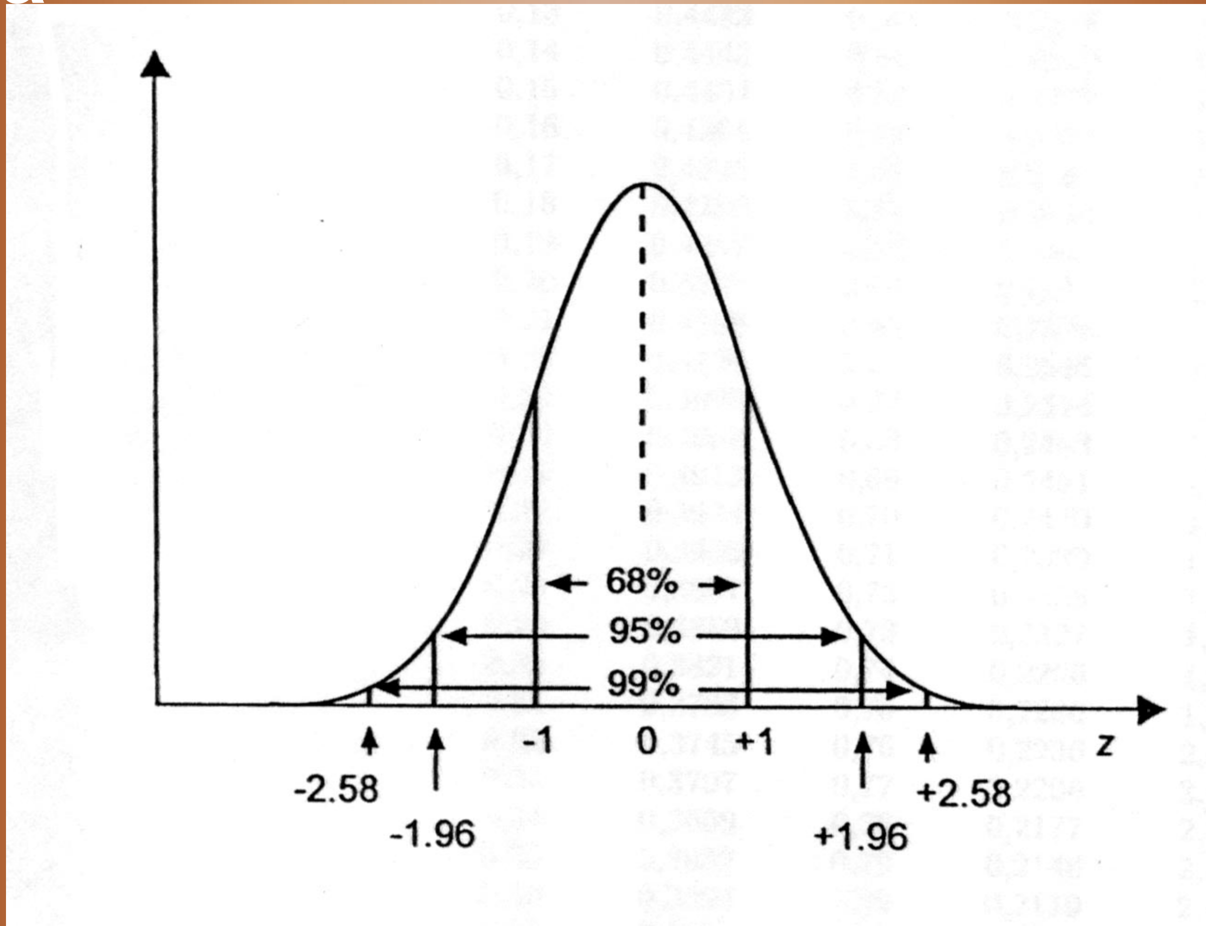


jednaka srednja vrijednost, različita standardna devijacija

NORMALNA DISTRIBUCIJA – raspored i položaj pojedinih jedinica skupa

- unutar normalne distribucije nalazi se uvijek isti postotak jedinica statističkog skupa, a udaljenost pojedine jedinice od aritmetičke sredine izračunava se u jedinicama standardne devijacije
- unutar granica ($\bar{x}$ - s) i ($\bar{x}$ + s) nalazi se 68,3 % od svih rezultata
- unutar granica ($\bar{x}$ - 1,96 s) i ($\bar{x}$ + 1,96 s) nalazi se 95,4 % od svih rezultata - raspon 95% rezultata; “ reference range “
- unutar granica ($\bar{x}$ - 2,58 s) i ($\bar{x}$ + 2,58 s) nalazi se 99,7 % od svih rezultata

NORMALNA DISTRIBUCIJA – raspored i položaj pojedinih jedinica skupa



NORMALNA DISTRIBUCIJA – praktična primjena

- normalna distribucija je osnova za izračunavanje vjerojatnosti određenog rezulatata u nizu mjerenja

VJEROJATNOSTI ODREĐENOG REZULTATA (uz pretpostavku normalne distribucije)

- osniva se na
  - STANDARDIZIRANOM ODSTUPANJU (z)
  - TABLICI KOJA POKAZUJE POVRŠINU ISPOD NORMALNE KRIVULJE ZA ODREĐENO STANDARDIZIRANO ODSTUPANJE (z)

Tablica

površine ispod normalne krivulje

P = površina standardne normalne raspodjelne krivulje od zadane vrijednosti X do kraja krivulje. Površina cijele krivulje = 1

$$z = \frac{X - \overline{X}}{s}$$

z	P	z	P	z	P
0,00	0,5000	0,44	0,3300	0,88	0,1894
0,01	0,4960	0,45	0,3264	0,89	0,1867
0,02	0,4920	0,46	0,3228	0,90	0,1841
0,03	0,4880	0,47	0,3192	0,91	0,1814
0,04	0,4840	0,48	0,3156	0,92	0,1788
0,05	0,4801	0,49	0,3121	0,93	0,1762
0,06	0,4761	0,50	0,3085	0,94	0,1736
0,07	0,4721	0,51	0,3050	0,95	0,1711
0,08	0,4681	0,52	0,3015	0,96	0,1685
0,09	0,4641	0,53	0,2981	0,97	0,1660
0,10	0,4602	0,54	0,2946	0,98	0,1635
0,11	0,4562	0,55	0,2912	0,99	0,1611
0,12	0,4522	0,56	0,2877	1,00	0,1587
0,13	0,4483	0,57	0,2843	1,05	0,1469
0,14	0,4443	0,58	0,2810	1,10	0,1357
0,15	0,4404	0,59	0,2776	1,15	0,1251
0,16	0,4364	0,60	0,2743	1,20	0,1151
0,17	0,4325	0,61	0,2709	1,25	0,1056
0,18	0,4286	0,62	0,2676	1,30	0,0968
0,19	0,4247	0,63	0,2643	1,35	0,0885
0,20	0,4207	0,64	0,2611	1,40	0,0808
0,21	0,4168	0,65	0,2578	1,45	0,0735
0,22	0,4129	0,66	0,2546	1,50	0,0668
0,23	0,4090	0,67	0,2514	1,55	0,0606
0,24	0,4052	0,68	0,2483	1,60	0,0548
0,25	0,4013	0,69	0,2451	1,65	0,0495
0,26	0,3974	0,70	0,2420	1,70	0,0446
0,27	0,3936	0,71	0,2389	1,75	0,0401
0,28	0,3897	0,72	0,2358	1,80	0,0359
0,29	0,3859	0,73	0,2327	1,85	0,0322
0,30	0,3821	0,74	0,2296	1,90	0,0287
0,31	0,3783	0,75	0,2266	1,95	0,0256
0,32	0,3745	0,76	0,2236	2,00	0,0228
0,33	0,3707	0,77	0,2206	2,10	0,0179
0,34	0,3669	0,78	0,2177	2,20	0,0139
0,35	0,3632	0,79	0,2148	2,30	0,0107
0,36	0,3594	0,80	0,2119	2,40	0,00820
0,37	0,3557	0,81	0,2090	2,50	0,00621
0,38	0,3520	0,82	0,2061	2,60	0,00466
0,39	0,3483	0,83	0,2033	2,70	0,00347
0,40	0,3446	0,84	0,2005	2,80	0,00256
0,41	0,3409	0,85	0,1977	2,90	0,00187
0,42	0,3372	0,86	0,1949	3,00	0,00135
0,43	0,3336	0,87	0,1922	3,50	0,000233
				4,00	0,0000317

- primjer:

  Prosječna masa teladi namijenjene za tov iznosi 170 kg, a standardna devijacija 10 kg. Utvrdite:

  1. S kojom proporcijom se pojavljuje telad čija je masa veća od 180 kg?
  2. Koliki je udio (broj) teladi čija je masa tijela između 170 i 180 kg?

$$N = 250; \quad X_1 = 180; \quad \overline{X} = 170; \quad s = 10$$

$$Z = \frac{X_1 - \overline{X}}{s} = \frac{180 - 170}{10} = 1$$

primjer: nastavak

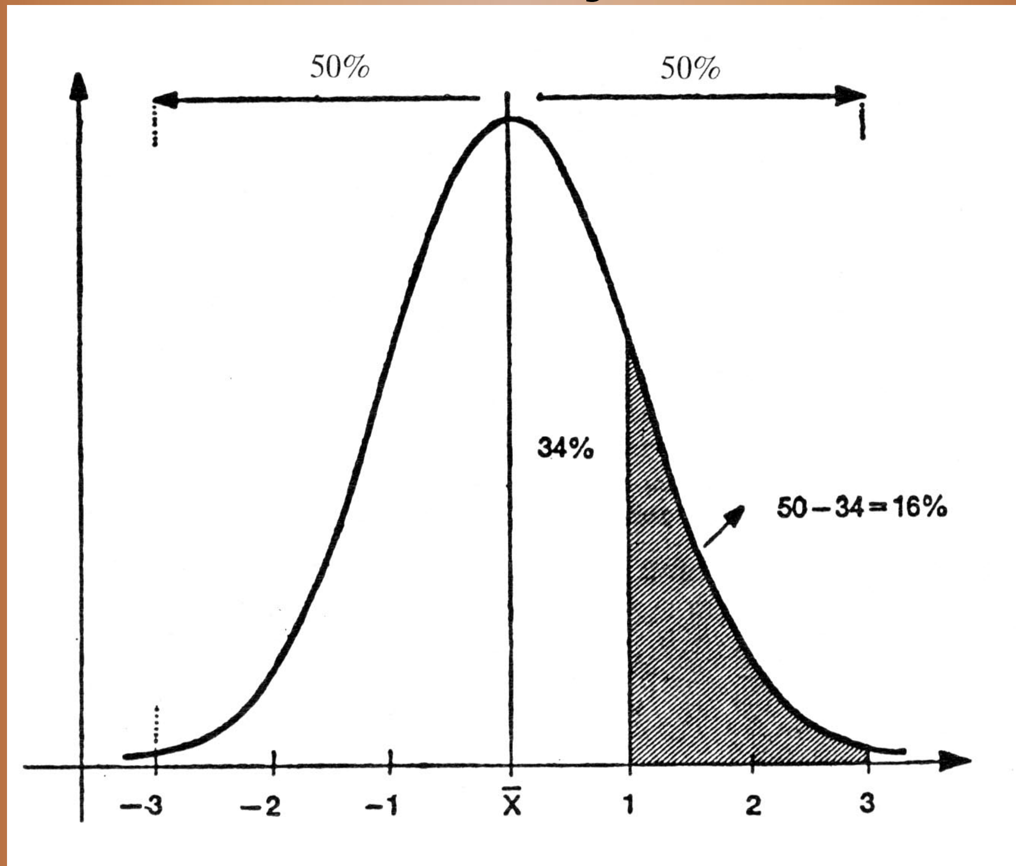
1. Vrijednost koju u “Tablici normalne distribucije” nalazimo na z = 1 iznosi 0,1587 što znači da je to površina pod normalnom krivuljom, odnosno da udio teladi s tjelesnom masom većom od 180 kg iznosi približno 16% ili 40 teladi.

2. Udio teladi čija je tjelesna masa između 170 i 180 kg iznosi 0,3413% ili 85 teladi, jer $\bar{x} + 1s$ uvijek sadrži 34,13% podataka.

(Polovica površine ispod normalne krivulje iznosi 0,500 od čega se odbije 0,3413, odnosno udio teladi do 180 kg mase te tako ostaje 0,1587 ili priližno 16% onih s tjelesnom masom preko 180 kg.)

primjer: nastavak

ako neki rezultat pada točno na +1s, onda u čitavoj populaciji ima oko 84% slabijih i oko 16% boljih rezultata



PROVJERA DA LI DISTRIBUCIJA KONKRETNIH PODATAKA ODGOVARA NORMALNOJ DISTRIBUCIJI POČETNI JE KORAK SVAKE STATISTIČKE OBRADE !!!

Postupci provjere:

- subjektivno
  - histogram
  - normal plot
- testovi
  - mjere asimetrije i zaobljenosti
  - Shapiro-Wilk W test
  - Kolmogorov-Smirnov test

Statistika

PROCJENA PARAMETARA POPULACIJE NA OSNOVI PARAMETARA UZORKA

Prof.dr.sc.Velimir Sušić

MJERENJE OBILJEŽJA U POPULACIJI

- ukoliko je populacija velika, mjerenje može biti:
  - **tehnički teško provedivo**
  - **skupo**
  - **besmisleno (ukoliko pri mjerenju uništavamo objekt mjerenja - napr. testiranje higijenske ispravnosti konzervi s hranom)**

POPULACIJA

- **“osnovni skup”   ili “ univerzum”**
- **svi članovi neke skupine s određenim karakteristikama koju mjerimo**
- **primjer 1:**

  tjelesna masa junica simentalske pasmine u Bjelovarsko-bilogorskoj županiji (“mjerljiva populacija”)
- **primjer 2:**

  količina mlijeka u ovaca kojima je u hranu dodan pivski trop (“neizmjerna populacija”)

UZORAK

- **ograničeni broj jedinica iz populacije**
- **vrijednosti pojedinih parametara (aritmetička sredina, standardna devijacija i dr.) utvrđene u uzorku su “približne vrijednosti” ili “procjene” tih istih parametara u populaciji.**

UZORAK - POPULACIJA

- uzorak nije “minijaturni duplikat” populacije:
  - **više uzastopno uzetih uzoraka iz iste populacije ne mora dati iste rezultate**
  - **rezultati više uzoraka pokazuju (slučajne) varijacije**
  - **slučajne varijacije uzoraka ovise o varijacijama u populaciji**
  - **što je veći varijabilitet u populaciji , to će biti veći i varijabilitet uzoraka uzetih iz te populacije**

UZORAK - POPULACIJA

- ako iz jedne populacije uzimamo mnogo uzoraka iste veličine i od svakog uzorka izračunamo aritmetičku sredinu ($\bar{X}$), pojedine aritmetičke sredine više ili manje će se razlikovati od prave aritmetičke sredine populacije

- ukoliko je broj uzoraka vrlo velik, aritmetičke sredine uzoraka iste veličine grupiraju se oko prave aritmetičke sredine (arimetičke sredine populacije) po jednakom zakonu kao što se individualni rezultati grupiraju oko svoje aritmetičke sredine - po zakonu NORMALNE DISTRIBUCIJE

- standardna devijacija te distribucije rapodjele je to manja što su uzorci veći

ARITMETIČKA SREDINA IZRAČUNATA U JEDNOM UZORKU:

- nije prava aritmetička sredina populacije, već samo njezina procjena
- procjena aritmetičke sredine će biti to točnija što je uzorak veći i što je svojstvo koje mjerimo manje varijabilno
- što neko svojstvo više varira, to se izlažemo većoj pogrešci kad iz aritmetičke sredine uzorka zaključujemo o aritemtičkoj sredini populacije
- kod svojstava koja jako variraju izlažemo se većoj pogrešci kada aritmetičku sredinu računamo iz malog broja rezultata (mali uzorak), nego kad je računamo iz većeg broja rezultata (veliki uzorak)

POGREŠKA PROCJENE PARAMETRA POPULACIJE NA OSNOVI PARAMETARA UZORKA:

- može se smanjiti povećanjem broja mjerenja (povećanjem uzorka)

- veličina pogreške opada proporcionalno drugom korijenu broja mjerenja

POGREŠKA KOJU VEŽEMO UZ NEKU ARITMETIČKU SREDINU UZORKA UTVRĐUJEMO PREMA IZRAZU:

$$\mathbf{s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}}$$

$s_{\bar{x}}$ čitamo kao “standardna pogreška aritmetičke sredine”

PRIMJENA STANDARDNE POGREŠKE ARITMETIČKE SREDINE

- na temelju standardne pogreške aritmetičke sredine uzorka možemo procijeniti aritmetičku sredinu populacije:
  - ne precizno (!!!), već samo u određenom rasponu
  - na veličinu raspona utječe razina pouzdanosti s kojom želimo procijeniti aritmetičku sredinu populacije. To zovemo “granice pouzdanosti”.
  - širi raspon unutar kojeg procjenjujemo aritmetičku sredinu populacije znači višu razinu pouzdanosti i obrnuto

GRANICE POUZDANOSTI (VJEROJATNOSTI)

- najčešće granice pouzdanosti (vjerojatnosti) koje zahtijevamo pri zaključivanju su 95% ili 99%, to pišemo:

$$95\% \ (p \leq 0{,}05)$$

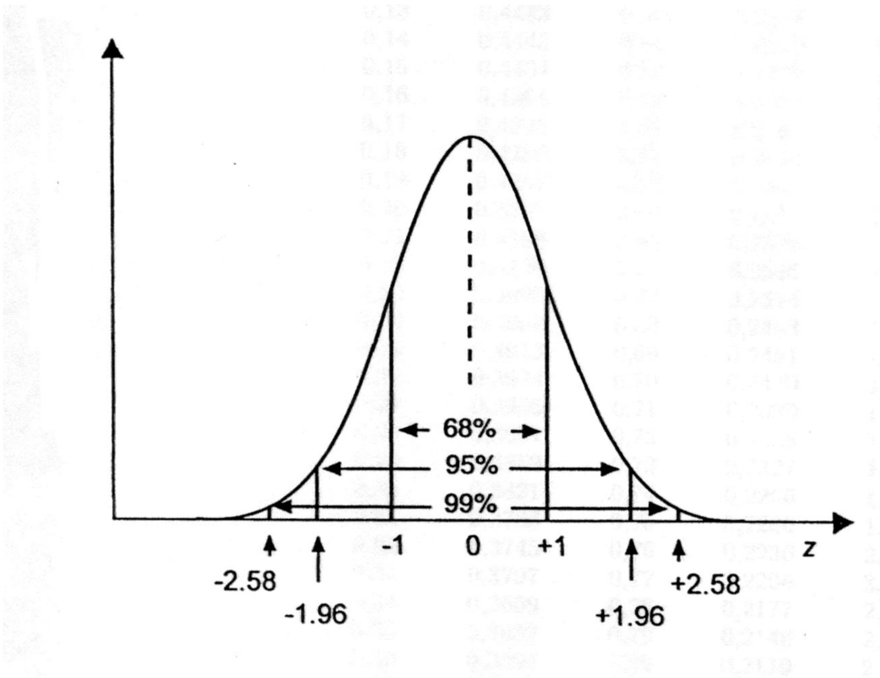
- vjerojatnost da je aritmetička sredina u određenom rasponu iznosi 95%, a da nije u tom rasponu iznosi manje ili jednako 5%

$$99\% \ (p \leq 0{,}01)$$

- vjerojatnost da je aritmetička sredina u određenom rasponu iznosi 99%, a da nije u tom rasponu iznosi manje ili jednako 1%

ODREĐIVANJE GRANICA POUZDANOSTI

- pri utvrđivanju granica pouzdanosti služimo se teoretskom osnovom normalne distribucije



- za granicu pouzdanosti od 95% odgovarajući "z" (u tablici površine ispod normalne krivulje) iznosi 1,96, a za 99% 2,58 standardnih devijacija

- **primjer:** u jednom uzorku krmača utvrđena je aritmetička sredina ($\bar{X}$) za broj oprasenih odojaka 9,0 i standardna pogreška aritmetičke sredine ($s_{\bar{x}}$) 0,4 odojka. Utvrdite raspon u kojem se kreće aritmetička sredina populacije s pouzdanošću od 95 i 99%.

$\bar{X}_{uz} = 9$; $s_{\bar{x}} = 0{,}4$

granica pouzdanosti 95% ($p<0{,}05$)

$\bar{X}_{uz} \pm 1{,}96 \times s_{\bar{x}} = 9 \pm 1{,}96 \times 0{,}4 = 9 \pm 0{,}78 = 8{,}22 \leq \bar{X}_{pop} \leq 9{,}78$

- s najmanje 95% vjerojatnosti procjenjujemo da se aritmetička sredina populacije nalazi unutar graničnih vrijednosti 8,22 i 9,78 odojaka

granica pouzdanosti 99% ($p<0{,}01$)

$\bar{X}_{uz} \pm 2{,}58 \times s_{\bar{x}} = 9 \pm 2{,}58 \times 0{,}4 = 9 \pm 1{,}03 = 7{,}97 \leq \bar{X}_{pop} \leq 10{,}03$

- s najmanje 99% vjerojatnosti procjenjujemo da se aritmetička sredina populacije nalazi unutar graničnih vrijednosti 7,97 i 10,03 odojaka